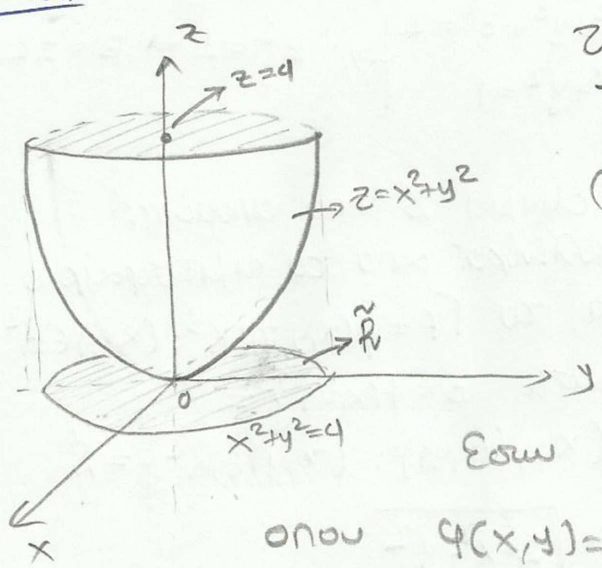
# ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο:

Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας που αποκόπτει από το παραβολοειδές $x^2+y^2-z=0$ το επίπεδο $z=4$.

**ΛΥΣΗ**




Το χωρίο $\tilde{R}$ κείται κάτω από την επιφάνεια $S$ στο επίπεδο $xy$. Η επιφάνεια $S$ είναι τμήμα της (γεωσταθμικής) επιφάνειας :

$f(x,y)=x^2+y^2$ και το $\tilde{R}$ είναι ο κυκλικός δίσκος $x^2+y^2\leq 4$

Έστω η συνάρτηση $\varphi : \tilde{R} \to \mathbb{R}^3$

όπου $\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$N(\varphi(x,y)) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (-2x, -2y, 1)$$

$$\|N(\varphi(x,y))\| = \sqrt{4x^2+4y^2+1}$$

$$\int_{x^2+y^2\leq 4} \|N(\varphi(x,y))\|\, d(x,y) = \int_{x^2+y^2\leq 4} \sqrt{4x^2+4y^2+1}\, d(x,y)$$ πολικές συντεταγμένες

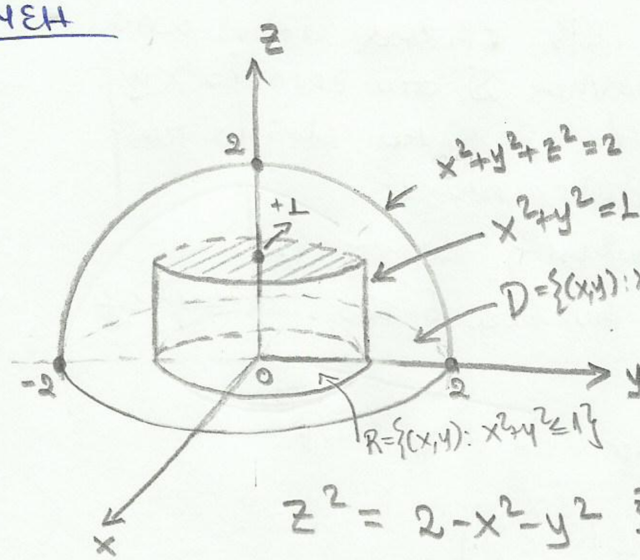
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{4r^2+1}\cdot r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{12}(4r^2+1)^{3/2}\right]_0^2 d\theta = \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-1\right)$$

τετραγ. μονάδ.

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

Βρείτε το εμβαδόν του τμήματος του ημισφαιρίου $x^2+y^2+z^2=2$ με $z \geq 0$ που αποκόπτει ο κύλινδρος $x^2+y^2=1$

**ΛΥΣΗ**




$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=2 \\ x^2+y^2=1 \end{array}\right. \rightarrow z^2=1 \Rightarrow z=\pm 1$$

Το τμήμα $S$ που αποκόπτει ο κύλινδρος από το ημισφαίριο είναι το $\Gamma_f=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 : (x,y)\in\mathbb{R}^2$ ώστε $z=f(x,y)\} =$
$=\{(x,y,f(x,y)) : (x,y)\in\mathbb{R}^2\}=S$

$$z^2=2-x^2-y^2 \overset{z\geq 0}{\Longrightarrow} z=+\sqrt{2-x^2-y^2}$$

Έστω $\varphi(x,y)=\begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{2-x^2-y^2}\end{pmatrix}, \quad \forall (x,y)\in D=\{(x,y): x^2+y^2\leq 2\}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{2-x^2-y^2}}\end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{\sqrt{2-x^2-y^2}}\end{pmatrix}$$

$$N(\varphi(x,y))=\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)\times\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)=\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)=$$

$$=\left(\frac{x}{\sqrt{2-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{2-x^2-y^2}}, 1\right).$$

Άρα,

$$\int_R \|N(\varphi(x,y))\|\, d(x,y)=\int_R \sqrt{\frac{\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+2-\cancel{x^2}-\cancel{y^2}}{2-x^2-y^2}}\, d(x,y)=$$

$$=\int_R \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x^2-y^2}}\, d(x,y) \underset{\text{συντεταγμ.}}{\overset{\text{πολικές}}{=}} \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-r^2}}\cdot r\, dr\, d\theta=\ldots$$

$=2\pi(2-\sqrt{2})$ τετραγ. μονάδες

$$\phi(r,\theta)=\begin{pmatrix} r\cdot\cos\theta \\ r\sin\theta \\ \theta \end{pmatrix}$$

## Επιφανειακά ολοκληρώματα:

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ο**

Έστω ελικοειδές που ορίζεται από την $\Phi: D \to \mathbb{R}^3$ όπου $x = r\cdot\cos\theta$, $y = r\cdot\sin\theta$ και $z=\theta$ και η $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+1}$. Να υπολογίσετε το $\int_S f\,dS$ εάν $D=\{(\theta,r):\ 0\le\theta\le 2\pi \ \&\ 0\le r\le 1\}\subseteq\mathbb{R}^2$

**ΛΥΣΗ**

$$\int_S f\,dS := \int_D f(\Phi(r,\theta))\cdot \|N(\varphi(r,\theta))\|\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + 1}\cdot \|N(\varphi(r,\theta))\|\,dr\,d\theta \quad (1)$$

όπου,

$$N(\varphi(r,\theta)) = \frac{\partial\phi(r,\theta)}{\partial r}\times\frac{\partial\phi(r,\theta)}{\partial\theta} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-r\sin\theta\\ r\cos\theta\\ 1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 1 \end{vmatrix} = (\sin\theta, -\cos\theta, -r)$$

Άρα, $\|N(\varphi(r,\theta))\| = \sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta+r^2} = \sqrt{1+r^2}$

Άρα, η (1) είναι:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (\sqrt{1+r^2})(\sqrt{1+r^2})\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[r+\frac{r^3}{3}\right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi}\left(1+\frac{1}{3}\right)d\theta = \frac{8}{3}\pi$$

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4ο:

Έστω $S$ η επιφάνεια που ορίζεται από την $z=x^2+y$ όπου $D$ το χωρίο $\{0\leq x\leq 1$ και $-1\leq y\leq 1\}$

Να βρεθεί το $\int_S x\,dS$

ΛΥΣΗ

Ορίζουμε $g(x,y)=x^2+y \quad , \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$\Gamma g=\{(x,y,g(x,y))\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

τότε η

$$\varphi(x,y)=\begin{pmatrix} x \\ y \\ g(x,y)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$$ είναι παραμετρική επιφάνεια

με εφαπτόμενα διανύσματα

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}g(x,y)\end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial}{\partial y}g(x,y)\end{pmatrix}$$

τα οποία θα έχουν κάθετο διάνυσμα:

$$N(\varphi(x,y))=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\times\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=\left(-\frac{\partial g}{\partial x},-\frac{\partial g}{\partial y},1\right)$$

και νόρμα: $$\|N(\varphi(x,y))\|=\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2+1}$$

Έτσι,

$$\int_S x\,dS=\int_D x\cdot\|N(\varphi(x,y))\|\,ds=$$

$$=\int_{-1}^{1}\int_0^1 x\cdot\sqrt{4x^2+2}\,dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{8}\int_{-1}^{1}\int_0^1\sqrt{4x^2+2}\,(8x)\,dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{8}\int_{-1}^{1}\left[\sqrt{4x^2+2}\right]_0^1 dy=\ldots=\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-\frac{1}{3}\right)$$